Interversion limite/somme avec une intégrale $\int\sum \longleftrightarrow \sum\int$

(Admis) $\longrightarrow$ **Convergence bornée :** (segment)

$(f_n) \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$

$f_n \xrightarrow{CVS} f$ CPM sur $[a,b]$

(f_n) unif bornée par $M \geqslant 0$

Alors $\boxed{\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f}$

$\longrightarrow$ **Convergence dominée** (I intervalle qq)

$(f_n) \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$

$f_n \xrightarrow{CVS} f \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$

$\exists \varphi \in L^1(I), \forall n \in \mathbb{N} \; |f_n| \leqslant \varphi$

Alors les f_n et f sont int et $\boxed{\int_I f_n \longrightarrow \int_I f}$

$\rightarrow$ si f_n CVU sur tout compact $\subset I$, on peut se passer de la CVB pour la démo.

$\longrightarrow$ **Convergence monotone (I 99)** (TIP)

$f_n \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$
$f_n \nearrow f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$ $\quad f \geqslant 0$

Alors $\boxed{f \in L^1(I) \iff \left(\int_I f_n\right) \text{ majorée, dans ce cas } \int_I f_n \longrightarrow \int_I f}$

$\Rightarrow$ CVD
$\Leftarrow$ CVB sur $[a,b]$ puis $\int_a^b f \leq \sup \int_I f_n$

$\int \Sigma \leftrightarrow \Sigma \int$ $\longrightarrow$ **Interversion somme - intégrale** (IntCR)

$u_n \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$
$\sum u_n \longrightarrow U$ CPM $: I \to \mathbb{R}$
série de $\lg \int_I |u_n|$ CV

Alors $\boxed{U \text{ intég et } \int_I U = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n \left(= \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)}$

Preuve : on utilise la CVM pour Mq $|U|$ int ($h_n \nearrow |U|$, $h_n = \inf$ ...)
puis $\to 0$ majore le reste et $\to 0$

$\longrightarrow$ Struc, optionnel : $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}^+)$, $f(0) = 1$

$I_n = \int_0^1 f(t)^n \, dt$

▷ $f'(0) = -\lambda$, $\lambda \in]0,1[\Rightarrow I_n \sim \dfrac{1}{n\lambda}$

▷ $f'(0) = 0$, $f''(0) = -\mu < 0 \Rightarrow I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2\mu n}}$

Hom : DL en $\mathcal{V}(0)$ + découpe $\int_0^\alpha + \int_\alpha^1$

(BL)